VỀ SỰ TỒN TẠI ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CỦA CẶP ÁNH XẠ T-CYCLIC CO KIỂU HARDY-ROGERS TRONG KHÔNG GIAN b-MÊTRIC NÓN

Đinh Huy Hoàng (1), **Nguyễn Hoàng Tân** (2)
1 *Viện Sư phạm Tự nhiên, Trường Đại học Vinh*
2 *Cao học khóa 26 chuyên ngành Toán Giải tích, Trường Đại học Vinh*
Ngày nhận bài 14/7/2020, ngày nhận đăng 23/9/2020

Tóm tắt: Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu khái niệm cặp ánh xạ T-cyclic co kiểu Hardy-Rogers và thiết lập sự tồn tại điểm bất động chung của cặp ánh xạ này trong không gian b-mêtric nón. Kết quả của chúng tôi là mở rộng của một số kết quả tương tự trong $[3, 6]$.
Từ khóa: Điểm bất động chung; ánh xạ T-cyclic co kiểu Hardy-Rogers; không gian mêtric nón.

1 Mở đầu

Khái niệm ánh xạ cyclic được W. A. Kirt và các cộng sự ([8]) đưa ra và nghiên cứu vào năm 2003 với mục đích mở rộng Nguyên lý ánh xạ co của Banach cho lớp các ánh xạ không liên tục. Từ đó, vấn đề về sự tồn tại điểm bất động của các ánh xạ cyclic thỏa mãn điều kiện co nào đó trong không gian mêtric hay trong các không gian tổng quát hơn như không gian mêtric nón, không gian b-mêtric đã được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu và thu được nhiều kết quả xem ([1, 3, 6, 8, 10]). Vào năm 2016, để mở rộng một số kết quả về điểm bất động của các ánh xạ co yếu kiểu Chatterjea trong không gian mêtric có thứ tự bộ phận, M. Dinarvand ([3]) đã đưa ra khái niệm cặp ánh xạ cyclic (ψ, φ, A, B)-co yếu kiểu Chatterjea và chứng minh sự tồn tại điểm bất động chung của cặp ánh xạ này trong không gian b-mêtric có thứ tự bộ phận. Trong bài báo này, để mở rộng kết quả của M. Dinarvand ([3]) và một vài kết quả trong ([6]) cho không gian b-mêtric nón, chúng tôi định nghĩa khái niệm cặp ánh xạ T-cyclic co kiểu Hardy-Rogers và chứng minh sự tồn tại duy nhất điểm bất động chung của cặp ánh xạ này và của cặp ánh xạ (A, B)-tăng yếu trong không gian b-mêtric nón.

Đầu tiên, chúng ta nhắc lại một số khái niệm và kết quả cơ sở.

1.1 Định nghĩa. ([2]) Giả sử F là một tập khác rỗng và s là số thực $s \geq 1$. Hàm $d : F \times F \to [0; \infty)$ được gọi là *b-mêtric* trên F nếu với mọi $u, v, t \in F$, ta có

i) $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$;

ii) $d(u, t) \leq s\,[d(v, u) + d(v, t)]$ với mọi $u, v, t \in F$;

iii) $d(u, v) = d(v, u)$ với mọi $u, v \in F$.

1) Email:Hoangtan9sp1@Gmail.com (N. H. Tân)

Tập F cùng với một b-mêtric trên nó được gọi là *không gian b-mêtric* với tham số s, ta nói gọn là *không gian b-mêtric* và ký hiệu (F, d) hoặc F.

Chú ý. 1) Từ đây về sau, khi nói tới không gian b-mêtric ta luôn hiểu tham số của nó là $s \geq 1$.

2) Từ định nghĩa về không gian mêtric và không gian b-mêtric ta thấy rằng không gian mêtric là trường hợp đặc biệt của không gian b-mêtric khi $s = 1$.

3) Lớp các không gian b-mêtric thật sự rộng lớn hơn lớp các không gian mêtric.

1.2 Định nghĩa. ([4]) Cho X là không gian Banach trên trường số thực $\mathbb{R}$. Một tập con P của X được gọi là *nón* trong X nếu

i) P đóng, $P \neq \varnothing, P \neq \{0\}$;

ii) Với mọi $a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$ và $u, v \in P$ thì $au + bv \in P$;

iii) Nếu $u \in P$ và $-u \in P$ thì $u = 0$.

1.3 Chú ý. ([4]) Cho P là nón trong không gian Banach X. Trên X ta định nghĩa quan hệ thứ tự $\leq$ được xác định bởi P như sau: với mọi $u, v \in X$

$$u \leq v \Leftrightarrow v - u \in P.$$

Ta viết $u < v$ nếu $u \leq v$ và $u \neq v$, và viết $u \ll v$ nếu $v - u \in intP$, trong đó $intP$ là ký hiệu phần trong của P.

1.4 Bổ đề. ([4]) *Giả sử P là nón trong không gian Banach X $a, b, c \in X$, và $\{u_n\}, \{v_n\}$ là các dãy trong X, α là số thực dương. Khi đó,*

i) Nếu $a \ll b$ và $b \ll c$ thì $a \ll c$;

ii) Nếu $a \leq b$ và $b \ll c$ thì $a \ll c$;

iii) Nếu $a \ll b, c \ll d$ thì $a + c \ll b + d$;

iv) $\alpha intP \subset intP$;

v) Với mỗi $\delta > 0$ và $u \in intP$, tồn tại $0 < \gamma < 1$ sao cho $\|\gamma u\| < \delta$;

vi) Với mỗi $c_1 \in intP$ và $c_2 \in P$, tồn tại $d \in intP$ sao cho $c_1 \ll d$ và $c_2 \ll d$;

vii) Với mỗi $c_1, c_2 \in intP$, tồn tại $e \in intP$ sao cho $e \ll c_1$ và $e \ll c_2$;

viii) Nếu $a \in P$ và $a < u$ với mọi $u \in intP$ thì $a = 0$;

ix) Nếu $a \leq \lambda a$ với $a \in P, 0 < \lambda < 1$ thì $a = 0$;

x) Nếu $0 \leq u_n \leq v_n$ với mỗi $n \in \mathbb{N}$ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u, \lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$ thì $0 \leq u \leq v$.

1.5 Bổ đề. ([4]) *Giả sử P là nón trong không gian Banach X và $\{u_n\}$ là dãy trong P. Khi đó, nếu $u_n \to 0$ thì mỗi $c \in intP$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $u_n \ll c$ với mọi $n \geq n_0$.*

1.6 Định nghĩa. ([5]) Giả sử F là tập khác rỗng, P là nón trong không gian Banach thực X và hàm $d : F \times F \to X$. Hàm d được gọi là *b-mêtric nón* trên F nếu tồn tại $s \geq 1$ sao cho với mọi $u, v, t \in F$ ta có

i) $d(u,v) \in P$ (tức $0 \leq d(u,v)$) và $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$;

ii) $d(u,v) = d(v,u)$;

iii) $d(u,v) \leq s\,[d(u,t) + d(t,v)]$.

Tập F cùng với một b-mêtric nón d trên nó được gọi là *không gian b-mêtric nón* với tham số s và được ký hiệu bởi (F,d).

1.7 Chú ý. ([5]) 1) Trong Định nghĩa 1.6, nếu $s = 1$ thì ta được định nghĩa *mêtric nón và không gian mêtric nón.* Nói cách khác, không gian mêtric nón là trường hợp đặc biệt của không gian b-mêtric nón khi $s = 1$.

2) Tồn tại những không gian b-mêtric nón mà không phải là không gian mêtric nón.

3) Trong Định nghĩa 1.6, nếu ta lấy $X = \mathbb{R}, P = [0,\infty)$ thì ta được định nghĩa không gian b-mêtric. Như vậy không gian b-mêtric là trường hợp đặc biệt của không gian b-mêtric nón.

1.8 Ví dụ. ([5]) Lấy $X = \mathbb{R}^2, P = \{(u,v) \in X : u, v \geq 0\}, F = \mathbb{R}$ và $d : F \times F \to X$ là hàm xác định bởi

$$d(u,v) = \left(|u-v|^{\beta}, \alpha|u-v|^{\beta}\right), \forall (u,v) \in F \times F,$$

trong đó α, β, là hai hằng số, $\alpha \geq 0, \beta > 1$.

Khi đó, (F,d) là không gian b-mêtric nón với tham số $s \geq 2^{\beta} > 1$ nhưng (F,d) không phải là không gian mêtric nón.

1.9 Định nghĩa. ([5]) Giả sử (F,d) với tham số $s \geq 1$ là không gian b-mêtric nón, $u \in F$ và $\{u_n\}$ là dãy trong F.

i) Dãy $\{u_n\}$ được gọi là *hội tụ tới u* và được ký hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ hoặc $u_n \to u$ nếu với mọi $c \in intP$, tồn tại số tự nhiên n_c sao cho

$$d(u_n, u) \ll c, \forall n \geq n_c;$$

ii) Dãy $\{u_n\}$ được gọi là *dãy Cauchy* nếu với mọi $c \in intP$, tồn tại số tự nhiên n_c sao cho

$$d(u_n, u_m) \ll c, \forall m, n \geq n_c;$$

iii) Không gian b-mêtric nón (F,d), được gọi là *đầy đủ* nếu mọi dãy Cauchy trong F đều hội tụ.

1.10 Bổ đề. ([5]) *Giả sử $\{u_n\}$ là dãy trong không gian b-mêtric nón (F,d) và $u_n \to u \in F$. Khi đó, ta có*

i) $\{u_n\}$ là dãy Cauchy;

ii) u là duy nhất;

iii) Với mọi $v \in F$ và với mọi $c \in intP$, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho

$$\frac{1}{s}d(u,v) - c \le d(u_n,v) \le sd(u,v) + c, \forall n \ge n_0.$$

1.11 Định nghĩa. Giả sử (F,d) là là không gian b-mêtric nón và ánh xạ $f: F \to F$. Ánh xạ f được gọi là *liên tục* nếu mọi dãy $\{u_n\}$ trong F mà $u_n \to u$ ta có $fu_n \to fu$.

Ở đây và sau này ta viết fu thay cho $f(u)$ với mọi $u \in F$.

1.12 Định nghĩa. ([1]) Giả sử f và g là hai ánh xạ từ tập X vào X. Điểm $x \in X$ được gọi là *điểm trùng nhau* hay *điểm chung* của f và g nếu $fx = gx$.

Nếu x là điểm trùng nhau của f và g thì điểm $y = fx = gx$ được gọi là *giá trị chung* của f và g.

Điểm trùng nhau và giá trị chung của ba, bốn ánh xạ cũng được định nghĩa tương tự. Cặp (f,g) được gọi là *tương thích yếu* nếu $fgx = gfx$, trong đó x là điểm chung của f và g.

1.13 Định nghĩa. ([6]) Giả sử $A_1, ..., A_p$ là các tập con khác rỗng của không gian mêtric (X,d) và $f : \bigcup_{i=1}^{p} A_i \to \bigcup_{i=1}^{p} A_i$. Ánh xạ f được gọi là *cyclic* nếu $f(A_i) \subset A_{i+1}$, với mọi $i = 1,2,...,p$, trong đó $A_{p+1} = A_1$.

1.14 Định nghĩa. ([6]) Hàm $\psi : [0;+\infty) \to [0;+\infty)$ được gọi là *hàm chuyển đổi khoảng cách* hay *thay đổi khoảng cách* nếu ψ liên tục, không giảm và $\psi(t) = 0$ khi và chỉ khi $t = 0$.

1.15 Chú ý. Trong bài báo này, nếu (X,d) là không gian b-mêtric nón và trên X có thứ tự bộ phận được ký hiệu $\le$ thì ta nói $(X,\le,d)$ là không gian b-mêtric nón có thứ tự bộ phận. Ta ký hiệu

$$\pounds = \{\psi : [0;+\infty) \to [0;+\infty) \mid \psi \text{ là hàm chuyển đổi khoảng cách } \}$$

$$S = \{\varphi : [0;+\infty) \times [0;+\infty) \to [0;+\infty) \,|\varphi(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0,$$
$$\varphi\left(\liminf_{n\to\infty} a_n, \liminf_{n\to\infty} \mathrm{b}_n\right) \le \liminf_{n\to\infty} \varphi(a_n,b_n)\,\}.$$

1.16 Định nghĩa. ([3]) Giả sử $(X,\le,d)$ là không gian b-mêtric có thứ tự bộ phận, A và B là hai tập con đóng khác rỗng của X sao cho $A \cup B = X$. Cho f và g là hai ánh xạ từ X vào X. Cặp (f,g) được gọi là *cyclic(ψ,φ,A,B)-co yếu kiểu Chatterjea* nếu

i) $f(A) \subset B, g(B) \subset A$,

ii) Tồn tại $\psi \in \pounds, \varphi \in S$ sao cho với mọi $x \in A, y \in B$ mà $x \leq y$ hoặc $y \leq x$ ta có

$$\psi\left(s^2 d(fx, gy)\right) \leq \psi\left(\frac{d(x, gy) + d(y, fx)}{s+1}\right) - \varphi\left(d(x, gy), d(y, fx)\right).$$

1.17 Định nghĩa. ([9]) Giả sử $(X, \leq)$ là tập có thứ tự bộ phận, A và B là hai tập con của X sao cho $A \cup B = X$. Cặp ánh xạ $f, g : X \to X$ được gọi là (A, B)-*tăng yếu* nếu $fx \leq gfx$ với mọi $x \in A$ và $gy \leq fgy$ với mọi $y \in B$.

Hai định lý sau đây là các kết quả chính trong ([3]).

1.18 Định lí. ([3]) (Theorem 2.1) *Giả sử $(X, \leq, d)$ là không gian b-mêtric đầy đủ có thứ tự bộ phận với tham số $s \geq 1$, A và B là hai tập con đóng khác rỗng của X; $f, g : X \to X$ là hai ánh xạ (A, B)-tăng yếu. Khi đó, nếu*

a) Cặp (f, g) là cyclic (ψ, φ, A, B)-co yếu kiểu Chatterjea;

b) f hoặc g liên tục

thì f và g có điểm bất động chung $u \in A \cap B$.

1.19 Định lí. ([3]) (Theorem 2.2) *Giả sử $(X, \leq, d)$ là không gian b-mêtric đầy đủ có thứ tự bộ phận với tham số $s \geq 1$, A và B là hai tập con đóng khác rỗng của X; $f, g : X \to X$ là hai ánh xạ (A, B)-tăng yếu. Khi đó, nếu*

a) Cặp (f, g) là cyclic (ψ, φ, A, B)-co yếu kiểu Chatterjea;

b) Không gian $(X, \leq)$ là chính quy, nghĩa là nếu $\{x_n\}$ là dãy tăng trong X và $x_n \to u \in X$ thì $x_n \leq u$ với mọi $n = 1, 2, ...$

thì f và g có điểm bất động chung.

2 Các kết quả chính

2.1 Định nghĩa. Giả sử A và B là hai tập con khác rỗng của không gian b-mêtric nón (X, d), $A \cup B = X$; f, g và T là các ánh xạ từ X vào X. *Hai ánh xạ f và g được gọi là cặp T-cyclic co kiểu Hardy-Rogers nếu*

i) $f(A) \subset T(B), g(B) \subset T(A)$;

ii) Tồn tại các hằng số không âm $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_5$ sao cho $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_5 < 1$ và với mọi $x \in A, y \in B$ ta có
$d(fx, gy) \leq \alpha_1 d(Tx, Ty) + \alpha_2 d(Tx, fx) + \alpha_3 d(Tx, gy) + \alpha_4 d(Ty, fx) + \alpha_5 d(Ty, gy)$

Ta nhận thấy rằng, trong định nghĩa này nếu ta lấy $A = B = X, f = g$ và $T : X \to X$ là ánh xạ đồng nhất (tức $Tx = x$ với mọi $x \in X$) thì ta nhận được khái niệm ánh xạ co kiểu Hardy-Rogers.

2.2 Định lí. *Giả sử A, B là hai tập con đóng khác rỗng trong không gian b-mêtric nón đầy đủ $(X, d), A \cup B = X; f, g$ và T là các ánh xạ từ X vào chính nó thỏa các điều kiện sau*

i) T đơn ánh và $T(A), T(B)$ là hai tập con đóng trong X;

ii) f và g là cặp T-cyclic co kiểu Hardy-Rogers với các hằng số $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_5$ thỏa mãn

$$\alpha_1 + \alpha_2 + 2s\alpha_3 + \alpha_5 < 1, \tag{1}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + 2s\alpha_4 + \alpha_5 < 1, \tag{2}$$

$$(\alpha_1 s + \alpha_3 + \alpha_4)\, s < 1, \tag{3}$$

$$(\alpha_2 + \alpha_4 s)\, s < 1, \tag{4}$$

$$(\alpha_5 + \alpha_3 s)\, s < 1. \tag{5}$$

Khi đó, f, g và T có điểm trùng nhau và có duy nhất một giá trị chung. Hơn nữa nếu thêm giả thiết (f, T) và (g, T) là cặp ánh xạ tương thích yếu thì f, g và T có duy nhất một điểm bất động chung.

Chứng minh. Lấy $x_0 \in A$, vì $f(A) \subset T(B)$ nên tồn tại $x_1 \in B$ sao cho $fx_0 = Tx_1$. Do $g(B) \subset T(A)$ nên tồn tại $x_2 \in A$ sao cho $gx_1 = Tx_2$. Tiếp tục lý luận tương tự ta xây dựng được dãy các điểm $\{x_n\}$ trong $A \cup B$ sao cho

a) $x_{2n} \in A, x_{2n+1} \in B$ với mọi $n = 1, 2, ...$;

b) $fx_{2n} = Tx_{2n+1}, gx_{2n+1} = Tx_{2n+2}, \forall n = 0, 1, ...$

Vì f và g là cặp T-cyclic co kiểu Hardy-Rogers và $x_{2n} \in A, x_{2n+1} \in B$ nên với mọi $n = 0, 1, ...$ ta có

$$\begin{aligned}
d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2}) &= d(fx_{2n}, gx_{2n+1}) \\
&\le \alpha_1 d(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}) + \alpha_2 d(Tx_{2n}, fx_{2n}) \\
&\quad + \alpha_3 d(Tx_{2n}, gx_{2n+1}) + \alpha_4 d(Tx_{2n+1}, fx_{2n}) \\
&\quad + \alpha_5 d(Tx_{2n+1}, gx_{2n+1}) \\
&= \alpha_1 d(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}) + \alpha_2 d(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}) \\
&\quad + \alpha_3 d(Tx_{2n}, Tx_{2n+2}) + \alpha_4 d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}) \\
&\quad + \alpha_5 d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2}) \\
&\le \alpha_1 d(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}) + \alpha_2 d(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}) \\
&\quad + \alpha_3 s\left[d(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}) + d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2})\right] \\
&\quad + \alpha_5 d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2}).
\end{aligned}$$

Do đó

$$d\left(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2}\right) \leq \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + s\alpha_3}{1 - \alpha_3 s - \alpha_5} d\left(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}\right)$$
$$:= rd\left(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}\right), \forall n = 0, 1, ..., \tag{6}$$

trong đó

$$r = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + s\alpha_3}{1 - \alpha_3 s - \alpha_5}.$$

Tương tự ta có

$$d\left(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}\right) \leq qd\left(Tx_{2n-1}, Tx_{2n}\right), \forall n = 0, 1, ..., \tag{7}$$

trong đó

$$q = \frac{\alpha_1 + \alpha_5 + s\alpha_4}{1 - s\alpha_4 - \alpha_2}.$$

Từ (1) và (2) suy ra r và $q \in [0, 1)$. Đặt

$$\lambda := max\left(r, q\right) \in \left[0, 1\right).$$

Từ (6) và (7) suy ra

$$d\left(Tx_n, Tx_{n+1}\right) \leq \lambda d\left(Tx_{n-1}, Tx_n\right), \forall n = 1, 2, ...,$$

Bất đẳng thức này chứng tỏ

$$d\left(Tx_n, Tx_{n+1}\right) \leq \lambda^n d\left(Tx_0, Tx_1\right), \forall n = 1, 2, ..., \tag{8}$$

Vì $\lambda \in [0, 1)$ nên $\lambda^n \to 0$ khi $n \to \infty$. Kết hợp với (8) suy ra $d\left(Tx_n, Tx_{n+1}\right) \to 0$ khi $n \to \infty$, tức là với mọi $c \in intP$ tồn tại số tự nhiên n_c sao cho

$$d\left(Tx_n, Tx_{n+1}\right) \ll c, \forall n \geq n_c. \tag{9}$$

Tiếp theo, ta chứng minh $\{Tx_n\}$ là *dãy Cauchy*, tức chứng minh với mọi $c \in intP$ ta có

$$d\left(Tx_n, Tx_{n+k}\right) \ll c \tag{10}$$

với mọi số tự nhiên n đủ lớn và với mọi số tự nhiên k.
Từ (9) và từ bất đẳng thức

$$d\left(Tx_n, Tx_{n+k}\right) \leq sd\left(Tx_n, Tx_{n+1}\right) + sd\left(Tx_{n+1}, Tx_{(n+1)+k-1}\right)$$

với mọi n và với mọi k, suy ra chỉ cần chứng minh bất đẳng thức (10) đúng với mọi số tự nhiên n đủ lớn và với mọi số tự nhiên k lẻ là đủ.

Giả sử k là số tự nhiên lẻ và n là số tự nhiên chẵn. Khi đó, $x_n \in A$ và $x_{n+k} \in B$. Do đó $Tx_n = gx_{n-1}, Tx_{n+k} = fx_{n+k-1}$. Từ đó, sử dụng điều kiện co ta có

$$\begin{aligned} d\left(Tx_n, Tx_{n+k}\right) &= d\left(fx_{n+k-1}, gx_{n-1}\right) \\ &\leq \alpha_1 d\left(Tx_{n+k-1}, Tx_{n-1}\right) + \alpha_2 d\left(Tx_{n+k-1}, Tx_{n+k}\right) \\ &+ \alpha_3 d\left(Tx_{n+k-1}, Tx_n\right) + \alpha_4 d\left(Tx_{n-1}, Tx_{n+k}\right) \\ &+ \alpha_5 d\left(Tx_{n-1}, Tx_n\right) \\ &\leq \alpha_1 sd\left(Tx_{n+k-1}, Tx_{n+k}\right) + \alpha_1 s^2 d\left(Tx_{n+k}, Tx_n\right) \\ &+ \alpha_1 s^2 d\left(Tx_n, Tx_{n-1}\right) + \alpha_2 d\left(Tx_{n+k-1}, Tx_{n+k}\right) \\ &+ \alpha_3 sd\left(Tx_{n+k-1}, Tx_{n+k}\right) + \alpha_3 sd\left(Tx_{n+k}, Tx_n\right) \\ &+ \alpha_4 sd\left(Tx_{n-1}, Tx_n\right) + \alpha_4 sd\left(Tx_n, Tx_{n+k}\right) \\ &+ \alpha_5 d\left(Tx_{n-1}, Tx_n\right). \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \left(1 - \alpha_1 s^2 - \alpha_3 s - \alpha_4 s\right) d\left(Tx_n, Tx_{n+k}\right) &\leq \left(\alpha_1 s + \alpha_2 + \alpha_3 s\right) d\left(Tx_{n+k-1}, Tx_{n+k}\right) \\ &+ \left(\alpha_1 s^2 + \alpha_4 s + \alpha_5\right) d\left(Tx_{n-1}, Tx_n\right). \end{aligned}$$

Từ điều kiện (3) suy ra $1 - \alpha_1 s^2 - \alpha_3 s - \alpha_4 s > 0$. Do đó

$$d\left(Tx_n, Tx_{n+k}\right) \leq \frac{\alpha_1 s + \alpha_2 + \alpha_3 s}{1 - \alpha_1 s^2 - \alpha_3 s - \alpha_4 s} d\left(Tx_{n+k-1}, Tx_{n+k}\right)$$

$$+ \frac{\alpha_1 s^2 + \alpha_4 s + \alpha_5}{1 - \alpha_1 s^2 - \alpha_3 s - \alpha_4 s} d\left(Tx_{n-1}, Tx_n\right). \tag{11}$$

Từ (9) và (11) suy ra

$$d\left(Tx_n, Tx_{n+k}\right) \ll c \tag{12}$$

với mọi n chẵn đủ lớn và với mọi k lẻ. Từ (9) và (12) và bất đẳng thức

$$\begin{aligned} d\left(Tx_n, Tx_{n+k}\right) &\leq sd\left(Tx_n, Tx_{n+1}\right) + s^2 d\left(Tx_{n+k}, Tx_{n+k+1}\right) \\ &+ s^2 d\left(Tx_{n+1}, Tx_{(n+1)+k}\right) \end{aligned}$$

suy ra

$$d\left(Tx_n, Tx_{n+k}\right) \ll c$$

với mọi n đủ lớn và với mọi k lẻ. Như vậy (10) đúng với mọi n đủ lớn và với mọi k lẻ. Do đó theo lập luận ở trên ta kết luận được (10) đúng với mọi số tự nhiên n đủ lớn và với mọi số tự nhiên k, tức $\{Tx_n\}$ là *dãy Cauchy*. Vì (X, d) là không gian đầy đủ nên tồn tại $y \in X$ sao cho $Tx_n \to y$. Từ đó suy ra $Tx_{2n} \to y$ và $Tx_{2n+1} \to y$. Theo cách xây dựng dãy $\{x_n\}$ ta có $\{x_{2n}\} \subset A, \{x_{2n+1}\} \subset B$. Kết hợp với tính đóng của $T(A)$ và $T(B)$ suy ra $y \in T(A) \cap T(B)$. Mặt khác, T là đơn ánh nên từ $y \in T(A) \cap T(B)$ suy ra tồn tại $x \in A \cap B$ sao cho $y = Tx$. Như vậy $Tx_n \to Tx = y$.

Bây giờ, ta chứng minh x là điểm trùng nhau của f, g và T. Vì $x \in A \cap B$ nên sử dụng điều kiện co ta có

$$\begin{aligned}
d(y, fx) &\le sd(y, Tx_{2n+2}) + sd(fx, Tx_{2n+2}) \\
&= sd(y, Tx_{2n+2}) + sd(fx, gx_{2n+1}) \\
&\le sd(y, Tx_{2n+2}) + s[\alpha_1 d(Tx, Tx_{2n+1}) \\
&+ \alpha_2 d(Tx, fx) + \alpha_3 d(Tx, Tx_{2n+2}) \\
&+ \alpha_4 d(Tx_{2n+1}, fx) + \alpha_5 d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2})] \\
&\le sd(y, Tx_{2n+2}) + s[\alpha_1 d(Tx, Tx_{2n+1}) \\
&+ \alpha_2 d(y, fx) + \alpha_3 d(y, Tx_{2n+2}) \\
&+ s\alpha_4 d(Tx_{2n+1}, y) + s\alpha_4 d(y, fx) + \alpha_5 d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2})].
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\left(1 - \alpha_2 s - \alpha_4 s^2\right) d(y, fx) &\le s[d(y, Tx_{2n+2}) + \alpha_1 d(y, Tx_{2n+1}) \\
&+ \alpha_3 d(y, Tx_{2n+2}) + s\alpha_4 d(y, Tx_{2n+1}) \\
&+ \alpha_5 d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2})], \forall n = 0, 1, ...
\end{aligned}$$

Từ $Tx_n \to y$ suy ra với mọi $c \in intP$ tồn tại số tự nhiên n_c sao cho với mọi $n \ge n_c$ ta có

$$\begin{aligned}
\left(1 - \alpha_2 s - \alpha_4 s^2\right) d(y, fx) &\le s[(1 + \alpha_3) d(y, Tx_{2n+2}) \\
&+ (\alpha_1 + \alpha_4 s) d(y, Tx_{2n+1}) + \alpha_5 d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2})] \ll c
\end{aligned}$$

Do đó

$$\left(1 - \alpha_2 s - \alpha_4 s^2\right) d(y, fx) \ll c, \forall c \in \operatorname{int} P. \tag{13}$$

Từ điều kiện (4) suy ra $1 - \alpha_2 s - \alpha_4 s^2 > 0$. Do đó từ (13) và Bổ đề 1.4 *viii)* suy ra $d(y, fx) = 0$, tức $y = fx$. Sử dụng điều kiện (5), bằng cách tương tự như trên ta chứng minh được $y = gx$. Như vậy ta có

$$fx = gx = y = Tx,$$

tức x là điểm trùng nhau của f, g và T còn y là giá trị chung của f, g và T.

Giả sử f, g và T có thêm một giá trị chung nữa, ký hiệu là w. Khi đó, tồn tại $z \in X = A \cup B$ sao cho $fz = gz = Tz = w$. Giả sử $z \in B$. Khi đó, vì $x \in A$

$$\begin{aligned}
d(y, \mathrm{w}) = d(fx, gz) &\le \alpha_1 d(y, \mathrm{w}) + \alpha_2 d(y, y) \\
&+ \alpha_3 d(y, \mathrm{w}) + \alpha_4 d(\mathrm{w}, y) + \alpha_5 d(\mathrm{w}, \mathrm{w}) \\
&= (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4) d(y, \mathrm{w}).
\end{aligned}$$

Vì $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 < 1$ nên từ bất đẳng thức này suy ra $d(y, w) = 0$. Vì thế $y = w$. Nếu $z \in A$ thì sử dụng $x \in B$ và chứng minh tương tự ta cũng nhận được $y = w$. Như vậy, giá trị chung của f, g và T là duy nhất.

Cuối cùng, giả sử (f, T) và (g, T) là các cặp tương thích yếu. Khi đó, vì x là điểm chung của f, g và T nên

$$fTx = Tfx \text{ và } gTx = Tgx \quad .$$

Do đó $fy = gy = Ty$. Điều này chứng tỏ

$$u := fy = gy = Ty$$

cũng là một giá trị chung của f, g và T. Vì giá trị chung của f, g và T là duy nhất nên ta có $y = u = fy = gy = Ty$, tức y là điểm bất động chung duy nhất của f, g và T. □

Sau đây là một số hệ quả của Định lý 2.2.

Trong Định lý 2.2 lấy $\alpha_2 = \alpha_5, \alpha_3 = \alpha_4$ ta nhận được kết quả sau.

2.3 Hệ quả. *Giả sử A, B là hai tập con đóng khác rỗng trong không gian b-mêtric nón đầy đủ $(X, d), A \cup B = X$; f, g và T là các ánh xạ từ X vào chính nó thỏa các điều kiện sau*

i) T đơn ánh và $T(A), T(B)$ là hai tập con đóng trong X;

ii) f và g là cặp T-cyclic co kiểu Hardy-Rogers với các hằng số $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} \alpha_5 = \alpha_2; \alpha_3 &= \alpha_4, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2s\alpha_3 &< 1, \\ \alpha_1 s^2 + 2\alpha_3 s &< 1, \\ \alpha_2 s + \alpha_3 s^2 &< 1, \end{aligned}$$

$$d(fx, gy) \leq \alpha_1 d(Tx, Ty) + \alpha_2 [d(Tx, fx) + d(Ty, gy)] + \alpha_3 [d(Tx, fy) + d(Ty, gx)],$$

với mọi $x \in A, y \in B$.

Khi đó, f, g và T có điểm trùng nhau và có duy nhất một giá trị chung. Hơn nữa nếu thêm giả thiết (f, T) và (g, T) là hai cặp ánh xạ tương thích yếu thì f, g và T có duy nhất một điểm bất động chung.

Trong Định lý 2.2, lấy $T : X \to X$ là ánh xạ đồng nhất (tức $Tx = x$ với mọi $x \in X$) ta nhận được hệ quả sau.

2.4 Hệ quả. *Giả sử A, B là hai tập con đóng khác rỗng của không gian b-mêtric nón đầy đủ (X, d), f và $g : A \cup B \to A \cup B$ là hai ánh xạ thỏa mãn*

i) $f(A) \subset B, g(B) \subset A$;

ii) Tồn tại các hằng số không âm $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_5$ sao cho

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 s + \alpha_5 &< 1, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4 s + \alpha_5 &< 1, \\ (\alpha_1 s + \alpha_3 + \alpha_4)\, s &< 1, \\ (\alpha_2 + \alpha_4 s)\, s &< 1, \\ (\alpha_5 + \alpha_3 s)\, s &< 1 \end{aligned}$$

và

$$d\,(fx, gy) \le \alpha_1 d\,(x, y) + \alpha_2 d\,(x, fx) + \alpha_2 d\,(x, gy) + \alpha_4 d\,(y, fx) + \alpha_5 d\,(y, gy)$$

với mọi $x \in A, y \in B$.
Khi đó, f và g có duy nhất một điểm bất động chung.

Nhờ Hệ quả 2.4 ta thu được hệ quả sau.

2.5 Hệ quả. *Giả sử (X, d) là không gian mêtric nón đầy đủ và $f : X \to X$ là ánh xạ co kiểu Hardy-Rogers, tức là tồn tại các hằng số không âm $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_5$ sao cho*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_5 < 1 \tag{14}$$

và

$$d\,(fx, fy) \le \alpha_1 d\,(x, y) + \alpha_2 d\,(x, fx) + \alpha_3 d\,(x, fy)$$

$$+ \alpha_4 d\,(y, fx) + \alpha_5 d\,(y, fy)\,, \forall x, y \in X. \tag{15}$$

Khi đó, f có duy nhất điểm một bất động trong X.

Chứng minh. Từ (15) suy ra

$$d\,(fx, fy) = d\,(fy, fx) \le \alpha_1 d\,(x, y) + \alpha_2 d\,(y, fy) + \alpha_3 d\,(y, fx)$$

$$+\alpha_4 d\,(x, fy) + \alpha_5 d\,(x, fx)\,, \forall x, y \in X. \tag{16}$$

Từ (15) và (16) suy ra

$$d\,(fx, fy) \le \alpha_1 d\,(x, y) + \frac{\alpha_2 + \alpha_5}{2}\left[d\,(x, fx) + d\,(y, fy)\right]$$

$$+\frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}\left[d\,(x, fy) + d\,(y, fx)\right], \forall x, y \in X. \tag{17}$$

Đặt

$$\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \frac{\alpha_2 + \alpha_5}{2}, \beta_3 = \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}, \beta_4 = \beta_3, \beta_5 = \beta_2.$$

Khi đó (17) trở thành

$$\begin{aligned} d(fx, fy) \leq \beta_1 d(x,y) + \beta_2 d(x, fx) + \beta_3 d(x, fy) \\ + \beta_4 d(y, fx) + \beta_5 d(y, fy), \forall x, y \in X. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + \beta_5 = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_5 < 1, \\ \beta_1 + \beta_2 + 2\beta_4 + \beta_5 < 1, \\ \beta_1 + \beta_3 + \beta_4 < 1, \\ \beta_2 + \beta_4 = \beta_3 + \beta_5 < 1. \end{aligned}$$

Như vậy, các điều kiện của Hệ quả 2.4 được thỏa mãn với $f = g, s = 1$ và $A = B = X$. Do đó kết luận cần chứng minh được suy ra từ Hệ quả 2.4. □

2.6 Định lí. *Cho $(X, \leq, d)$ là không gian b-mêtric nón đầy đủ, A và B là hai tập con đóng khác rỗng sao cho $A \cup B = X$. Gỉa sử $f, g : X \to X$ là cặp ánh xạ (A, B)-tăng yếu thỏa mãn các điều kiện sau*

i) $f(A) \subset B, g(B) \subset A$;

ii) *Tồn tại các hằng số không âm $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_5$ sao cho các điều kiện* (1),(2),(3),(4),(5) *trong Định lý 2.2 được thỏa mãn và*

$$d(fx, gy) \leq \alpha_1 d(x,y) + \alpha_2 d(x, fx) + \alpha_3 d(x, gy)$$

$$+ \alpha_4 d(y, fx) + \alpha_5 d(y, gy) \tag{18}$$

với mọi $x \in A, y \in B$ mà $x \leq y$ hoặc $y \leq x$;

iii) *f hoặc g liên tục, hoặc $(X, \leq)$ chính quy.*

Khi đó, f và g có có điểm bất động chung trong $A \cap B$. Hơn nữa, nếu thêm giả thiết các điểm bất động chung của f và g so sánh được với nhau thì điểm bất động chung của f và g là duy nhất.

Chứng minh. Lấy $x_0 \in A$ và đặt $x_1 = fx_0 \in B, x_2 = gx_1 \in A$, $x_3 = fx_2 \in B$. Tiếp tục lý luận tương tự ta xây dựng được dãy $\{x_n\} \subset X$ sao cho

(a) $x_{2n} \in A, x_{2n+1} \in B, \forall n = 0, 1, ...,$

(b) $fx_{2n} = x_{2n+1}, gx_{2n+1} = x_{2n+2}, \forall n = 0, 1, ...,$

Vì (f, g) là cặp ánh xạ (A, B) tăng yếu nên

$$x_{2n+1} = fx_{2n} \leq gfx_{2n} = x_{2n+2} = gx_{2n+1} \leq fgx_{2n+1} = x_{2n+3}$$

với mọi $n = 0, 1, ...$ Như vậy các số hạng của $\{x_n\}$ là đôi một so sánh được với nhau. Do đó, ta có thể áp dụng điều kiện co (ii) cho các số hạng của $\{x_n\}$.
Mặt khác dãy $\{x_n\}$ chính là dãy $\{Tx_n\}$ trong chứng minh Định lý 2.2 với T là ánh xạ đồng nhất trên X. Do đó, tiếp tục lặp lại chứng minh của Định lý 2.2 và thay Tx_n bởi x_n ta nhận được dãy $\{x_n\}$ là *dãy Cauchy và* $x_n \to y \in A \cap B$.

Bây giờ, giả sử f hoặc g liên tục. Giả sử f liên tục. Khi đó, từ $x_n \to y$ suy ra $x_{2n} \to y$ và $x_{2n+1} \to y$. Do đó $fx_{2n} \to fy$ hay $x_{2n+1} \to fy$ theo Bổ đề 1.10 thì $y = fy$. Vì $y \in A \cap B$ và $y \leq y$ nên

$$\begin{aligned} d(y, gy) = d(fy, gy) &\leq \alpha_1 d(y, y) + \alpha_2 d(y, fy) + \alpha_3 d(y, gy) \\ &+ \alpha_4 d(y, y) + \alpha_5 d(y, gy) \\ &= (\alpha_3 + \alpha_5) d(y, gy) \end{aligned}$$

Kết hợp với $(\alpha_3 + \alpha_5) < 1$ suy ra $d(y, gy) = 0$ tức $y = gy$.
Như vậy y là điểm bất động chung của f và g.

Trường hợp g liên tục được chứng minh tương tự.

Cuối cùng, giả sử u cũng là điểm bất động chung của f và g và u so sánh được với y. Khi đó, từ $f(A) \subset B$ và $g(B) \subset A$ suy ra $u \in A \cap B$. Do đó

$$\begin{aligned} d(y, u) = d(fy, gu) &\leq \alpha_1 d(y, u) + \alpha_2 d(y, fy) + \alpha_3 d(y, gu) \\ &+ \alpha_4 d(u, fy) + \alpha_5 d(u, gu) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4) d(y, u). \end{aligned}$$

Từ $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 < 1$ suy ra $d(y, u) = 0$, tức $y = u$. Vậy điểm bất động chung của f và g là duy nhất. □

2.7 Chú ý. Trong trường hợp (X, d) là không gian b-mêtric thật sự nghĩa là $s > 1$ thì hai Định lý 1.18 và Định lý 1.19 tức Định lý 2.1 và Định lý 2.2 trong ([3]) là trường hợp đặc biệt của Định lý 2.6 khi lấy

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0, \alpha_4 = \frac{1}{s^2(s+1)}.$$

Thật vậy, nếu các giả thiết của Định lý 1.18 hoặc Định lý 1.19 được thỏa mãn thì từ điều kiện f và $g : X \to X$ là hai ánh xạ (A, B)-tăng yếu và là cặp cyclic (ψ, φ, A, B)-co yếu kiểu Chatterjea ta có

$$\psi\left(s^2 d(fx, gy)\right) \leq \psi\left(\frac{d(x, gy) + d(y, fx)}{s+1}\right) - \varphi\left(d(x, gy), d(y, fx)\right).$$

Vì ψ là hàm không giảm và $\varphi \geq 0$ nên từ bất đẳng thức trên suy ra

$$s^2 d(fx, gy) \leq \frac{d(x, gy) + d(y, fx)}{s+1}$$

hay

$$d(fx, gy) \leq \frac{d(x, gy) + d(y, fx)}{s^2(s+1)} = \alpha_4 [d(x, gy) + d(y, fx)]$$

với mọi $x \in A, y \in B$ mà $x \leq y$ hoặc $y \leq x$.

Từ đây suy ra điều kiện (18) trong Định lý 2.6 được thỏa mãn. Mặt khác ta dễ dàng kiểm tra được các điều kiện còn lại của Định lý 2.6 cũng được thỏa mãn với $s > 1$. Vậy Định lý 2.1 và Định lý 2.3 trong ([3]) là trường hợp đặc biệt của Định lý 2.6 khi (X, d) là không gian b-mêtric với $s > 1$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] P. Chaipunya, Y. J. Cho, W. Sintunavarat and P. Kumam, "Fixed Point and Commom Fixed Point Theorems for Cylic Quasi - Contractions in Metric and Ultrametric Spaces", *Advances in Pure Mathematics*, 2, 401-407, 2012.

[2] S. Czerwik, "Contraction mappings in b-metric space", *Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis*, Vol. 1, No. 1, 5–11, 1993.

[3] M. Dinarvand, "Fixed point for cyclic weakly Chatterjea type contractions in ordered b-metric spaces and applicatione to integral equation", *Journal Nonlinear Analysis and Applicationes 2016*, No. 2, 66–81, 2016.

[4] H. L. Guang, Z. Xian, "Cone metric space and fixed point theorems of contractive", *J. Math. Anal. Appl.*, 332, 1468–1476, 2007.

[5] N. Huussain and M. H. Shah, "KKM mappings in come b -metric spaces", *Computers and Math. Appl.*, 62, 1677–1684, 2010.

[6] N. Hussain, M. H. Shah, "Fixed points for mapping cycliccontractive conditions", *Fixed Point Theory*, 79–89, 2003.

[7] M. S. Khan, M, Swaleh and S. Sessa, "Fixed point theorems by altering distances between the point", *Bull. Anst. Math. Soc.*, 30, 1–9, 1984. https://doi.org /10.1017/5000497200001659.

[8]W. A. Kirk, P. S. Srinivasa and P. Vreramani, "Fixed points for mappings satisfying cuclical contractive conditions", *Fixed Point Theory*, Vol. 4, No. 1, 13–16, 2003.

[9] W. Shatanawi, "Fixed point theorems for nonlinear weakly C-contractive mappings in metric spaces", *Math. Comput. Model*, 54, 2816–2826, 2011.

[10] W. Shatanawi, M. Postolache, "Common fixed point results for mappings under nonlinear, contraction of cyclic form in ordered metric spaces", *Fixed Point Theory Appl.*, Article ID 60, 14 pages, 2013.

SUMMARY

ON EXISTENCE OF COMMON FIXED POINT FOR CYCLIC T-HARDY-ROGERS TYPE CONTRACTIVE PAIR IN CONE b-METRIC SPACES

In this paper, we introduce the notion of a pair T-cyclic Hardy-Rogers contractive maps and establish some common fixed results for this class of mappings in cone b-metric spaces. These results extend generalize well-known results.

Keywords: Common fixed point; contraction; T-cyclic Hardy-Rogers type contraction; cone b-metric space.